

第三章 附加材料

— 介绍 —

您是否希望在简短的课程描述中有更多的例子、讨论和评论？如果是这样，那么您来对地方了！这个文件包含了第三章中一些活动的附加材料。

对于谜题，提供了许多已解谜题的示例，并附有关于如何创建它们的额外评论。早期家庭数学项目基于这样的理念：早期数学是一个家庭应该一起完成的事情，而为您的孩子制作谜题与您一同解决是这一过程的重要部分。一旦您掌握了每个谜题的要领，您会发现大多数（如果不是全部）谜题对您来说都相对容易创建。

这些谜题的难度级别各不相同，接下来的几页中会有许多关于如何创建这些难度级别的建议和示例。总是从最简单的谜题开始。让您的孩子体验成功、理解并享受稍微简单一些的谜题，远比因为过于困难的谜题而感到沮丧、气馁和挫败要好得多。当您的孩子建立了信心并对数学活动充满热情时，就是时候慢慢加入更大的挑战了。此外，并非所有谜题对每个人都一样有趣，所以不要强迫孩子做那些似乎无法引起兴趣的谜题和活动。

接下来的页面中，您将会发现：

- 第三章 - 形状求和
- 第三章 - Nim游戏翻倍极限
- 第三章 - 计数偶数和奇数
- 第三章 - 求和组
- 第三章 - 动物园救援
- 第三章 - 常见求和
- 第三章 - 数独变体
- 第三章 - 多少种方法
- 第三章 - 扑克牌排序
- 第三章 - 差异金字塔

— 法律事项 —

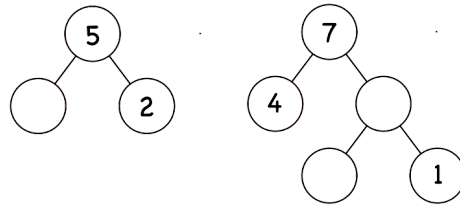
每个家庭都应该有机会一起学习和享受数学。为此，《早期家庭数学》是一个供家庭和教育者自由编辑、翻译、复制和分发的材料集合，仅限于非商业用途，无需获得许可。

© 版权归《早期家庭数学》所有 - Chris Wright 2024 版本1.2 创作共用：署名-非商业性使用 4.0 国际许可协议

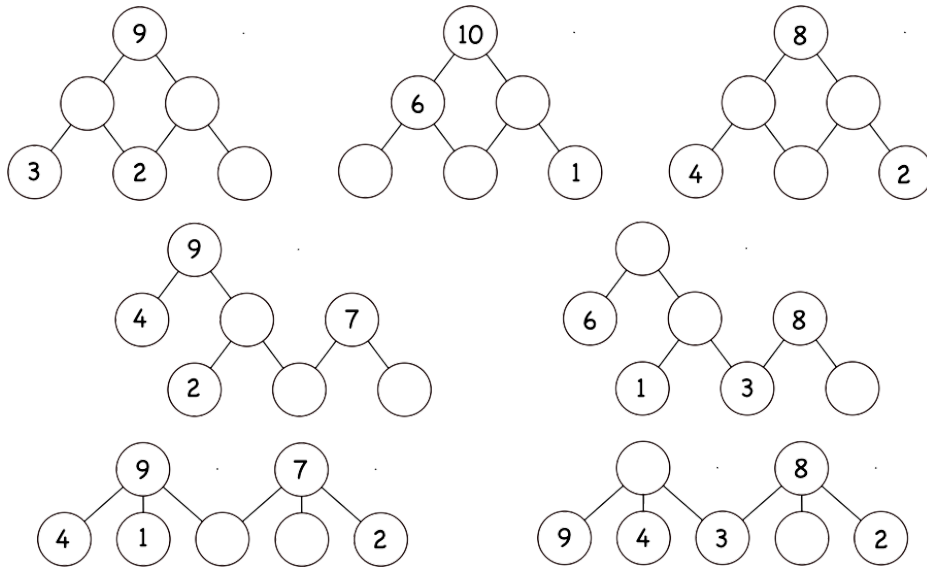
第三章 — 形状求和

这些谜题使用编号的圆圈按向上方式连接，每个圆圈的数字是它正下方并与之相连的所有圆圈数字的总和。

最简单的谜题中大部分圆圈已经填好数字。以下是两个容易解决的示例。



这些谜题可以通过让一个圆圈在多个方向上使用来增加难度。接下来的七个谜题中，除了第一行最右边的一个，其余都是直接计算的。这个稍复杂一些的谜题是因为中间的一个圆圈由它上方的两个未知圆圈共享。由于该谜题中的数字较小，因此可以通过一些试错法轻松解决。

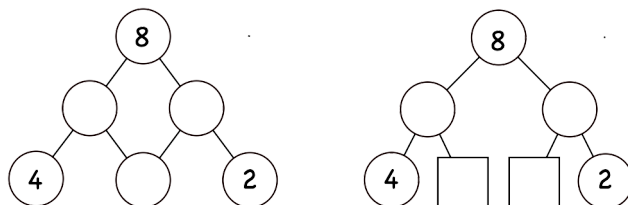


为这些谜题增加复杂性的方法之一是使用非圆形的形状。虽然圆圈中的数值可能会或不会与其他圆圈或形状中的数值重复，但非圆形形状中的数值必须与所有相同形状的位置数值相匹配。例如，所有的正方形都具有相同的数值。使用相同的形状来练习双数、近似双数和对半分的运算。

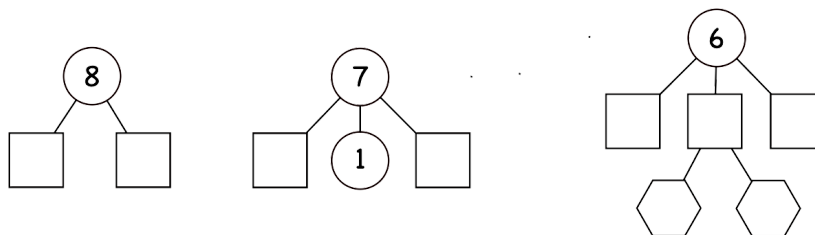
如果您愿意，您可以添加一条规则，即不同形状的非圆形图形必须具有不同的数值——例如，正方形和六边形必须具有不同的数值。

要制作这些谜题，首先从一个完全填满数字的图表开始，然后去掉一些数字。如果谜题中有重复的数字，用正方形或其他形状代替该重复的数字，而不是用圆圈。

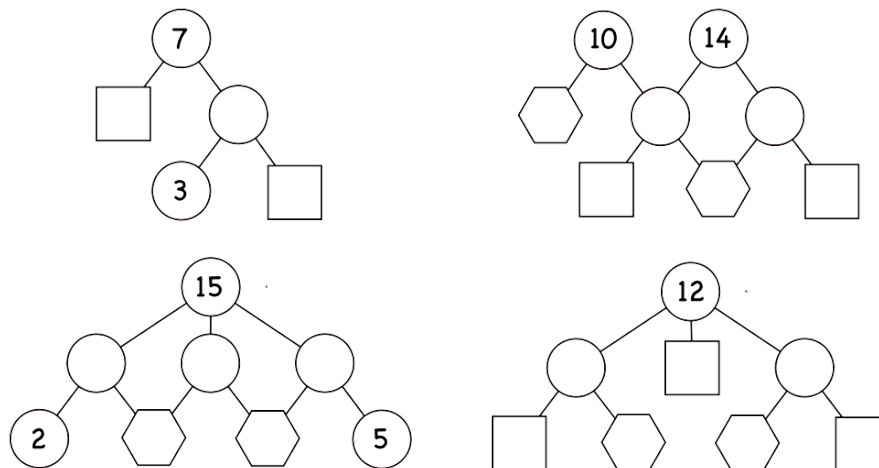
接下来的两个谜题说明了从两个方向使用一个圆圈与用两个正方形替换圆圈之间的心理差异。这两个谜题本质上是相同的，但对于一个年幼的孩子来说，第一个更容易理解和操作。在尝试使用非圆形图形的更复杂谜题之前，请让您的孩子充分练习只包含圆圈的谜题。



类似于接下来三个的谜题对于练习加法双数、近似双数和三重数非常有用。



以下是一些使用非圆形图形制作更复杂谜题的示例。如果您的孩子喜欢这些，还有很多其他变体可以探索。祝您解谜愉快！



第三章 – Nim游戏翻倍极限

— 一个堆 —

设定一个起始总数，比如20。让您的孩子选择先手还是后手。在第一次回合中，玩家选择从当前总数中减去1或2。第一次回合之后，玩家可以从1到上次回合使用的数字的两倍之间的任意数字中进行减法。第一个达到0的人获胜。

这个游戏有许多变体版本。其中一些包括：

- 第一个达到目标的人输。
- 初始范围不是1到2，而是从1到目标数减1(或减2)。
- 从0开始练习加法，第一个达到目标的人获胜(或输)。
- 初始限制是目标数减1(或减2)，而不是将上次使用的值翻倍，而是使用上次回合的值作为限制。
- 初始限制是目标数减1(或减2)，而不是将上次使用的值翻倍，而是使用上次回合值的三倍。

如您所见，游戏有很多变体。如果您喜欢这个游戏，可以自创一些家庭规则。

大多数情况下，这些游戏比使用固定选择集的Nim版本更难分析。

— 多个堆 —

另一种制作这个游戏新版本的方法是使用多个数字。可以将这种版本想象成有几个堆积的代币(如小石子、食物块)。例如，您可以有两个堆，一个堆里有12个代币，另一个堆里有8个代币。一个标准规则是，您可以拿任何数量的代币，但必须全部来自一个堆。

这个游戏的变体版本包括：

- 有两个以上的堆。
- 您可以选择从所有堆中取出相同数量的代币。
- 您可以选择从您选择的堆中取出相同数量的代币。
- 只能从最大堆中取代币。

正如您所想，这个游戏还有更多的变体；不过，也许这些已经足够了！

第三章 — 计数偶数和奇数

— 基本设置 —

使用一小组数字卡片，涉及一些小的数量。开始时使用三张卡片，如果您的孩子喜欢这个探究过程，可以稍后使用更多的卡片。

假设数字是1、2和3。问题是：如果随机抽取两张卡片并将它们相加，得到偶数还是奇数的可能性更大？

有两种方法可以探究这个问题。一种方法是做实验。洗牌，随机抽取两张卡片，看看它们的和是偶数还是奇数。每次实验后，在纸上适当的列上做一个勾，以计算偶数和奇数的结果。

第二种方法是计算获得奇数与偶数的方式数量。例如，在使用1、2和3的情况下，有一种方法可以得到偶数(1 + 3)，而有两种方法可以得到奇数(1 + 2, 2 + 3)。因此，对于数字1、2和3，奇数和的可能性是偶数和的两倍。

在用1、2和3玩了一段时间后，尝试其他三张卡片组合。2、3和4的表现是否有所不同？组合1、3、5和2、4、6只会产生偶数——这是为什么呢？在用三张卡片玩了一段时间后，看看用4张或更多卡片会发生什么。

为了增加趣味，可以让一个玩家代表“偶数”，另一个玩家代表“奇数”。在进行十次试验后，看看谁的成功次数最多。

— 调查分析 —

调查的有趣之处在于，它鼓励人们与数字互动，扮演数学家的角色。如上所述，可以尝试不同的三数字组合。经过一些实验后，你的孩子可能会发现，任何包含至少一个偶数和一个奇数的三数字组合都会表现出相同的特性。然而，如果所有数字都是奇数或所有数字都是偶数，那么它们的和都是偶数。这就引出了一个常见的问题：为什么会这样呢？

经过一些实验，即使是年幼的孩子也可能会偶然发现一个美妙的数字理论规则，该规则指出：

- 偶数加偶数是偶数
- 偶数加奇数是奇数
- 奇数加奇数是偶数

为什么这个规则有效呢？可以使用“数字形状”活动，用两排代币来表示偶数和奇数——什么时候相加后的数字会形成两排相等的代币呢？

一旦发现了这个规则，你的孩子可能会意识到，具体的数字其实并没有那么重要。拥有 1、2、3 这些数字，与拥有 3、4、5(或 3、12、17) 其实并没有什么不同。分析的关键实际上在于有多少个数字是偶数，有多少个数字是奇数。

考虑到这一点，以下是三个和四个数字组合的可能结果表格。

三个数字的组合：

- 3 个偶数, 0 个奇数: 3 个偶数和
- 2 个偶数, 1 个奇数: 1 个偶数和, 2 个奇数和
- 1 个偶数, 2 个奇数: 1 个偶数和, 2 个奇数和
- 0 个偶数, 3 个奇数: 3 个偶数和

四个数字的组合：

- 4 个偶数, 0 个奇数: 6 个偶数和
- 3 个偶数, 1 个奇数: 3 个偶数和
- 2 个偶数, 2 个奇数: 2 个偶数和, 4 个奇数和
- 1 个偶数, 3 个奇数: 3 个偶数和, 3 个奇数和
- 0 个偶数, 4 个奇数: 6 个偶数和

这些结果令人惊讶，并且如果有兴趣的话还有很多事情可以探究！例如，5 个数字、6 个数字或更多数字会有什么情况？为什么交换偶数和奇数似乎不会改变结果？例如，如果你有 3 个偶数和 1 个奇数，你得到的结果与 1 个偶数和 3 个奇数是一样的。在像 3 个偶数和 1 个奇数这样的情况下，为什么结果在偶数和奇数的数量不平衡时仍然是平衡的？

这是一些有趣的数学问题，即使是小孩子也可以玩一玩！

第三章 - 求和组

这些谜题使用一个数字网格，并设定了一个目标和。找到两、三或四个数字的组合，这些数字的和等于目标值。组内的成员必须相邻。使用代币，比如不同类型的食物，来标识谜题中的每个组。完成后，整个谜题将由已标识的组组成。

6	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="color: green;">1</td><td style="color: green;">2</td><td style="color: red;">2</td></tr> <tr><td style="color: red;">5</td><td style="color: green;">3</td><td style="color: red;">4</td></tr> <tr><td style="color: red;">1</td><td style="color: blue;">3</td><td style="color: blue;">3</td></tr> </table>	1	2	2	5	3	4	1	3	3
1	2	2								
5	3	4								
1	3	3								

8	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td style="color: red;">0</td><td style="color: red;">8</td><td style="color: blue;">3</td><td style="color: blue;">2</td></tr> <tr><td style="color: blue;">2</td><td style="color: green;">4</td><td style="color: green;">4</td><td style="color: blue;">3</td></tr> <tr><td style="color: blue;">6</td><td style="color: red;">5</td><td style="color: blue;">5</td><td style="color: green;">7</td></tr> <tr><td style="color: red;">1</td><td style="color: red;">2</td><td style="color: blue;">3</td><td style="color: green;">1</td></tr> </table>	0	8	3	2	2	4	4	3	6	5	5	7	1	2	3	1
0	8	3	2														
2	4	4	3														
6	5	5	7														
1	2	3	1														

这些谜题特别适合练习数字配对。通过使用代币代替铅笔，你可以反复使用谜题纸张。

创建这些谜题的方法是从一个空白的网格开始，在网格上填入数字，使用可以加到目标和的配对或三元组。如果谜题只有一个解答会更有趣，但也不必过于担心。

6	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	1	2	2	5	3	4	1	3	3	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>6</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td></tr> </table>	1	6	2	1	0	4	4	1	5	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	1	2	3	5	3	4	1	3	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr> </table>	4	2	1	3	5	1	3	1	4	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	1	0	1	5	5	4	3	3	2
1	2	2																																																
5	3	4																																																
1	3	3																																																
1	6	2																																																
1	0	4																																																
4	1	5																																																
1	2	3																																																
5	3	4																																																
1	3	2																																																
4	2	1																																																
3	5	1																																																
3	1	4																																																
1	0	1																																																
5	5	4																																																
3	3	2																																																

6	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>5</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr> </table>	5	1	4	2	3	1	3	3	2	2	3	1	5	1	4	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>4</td><td>5</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr> </table>	4	5	1	3	2	1	3	3	5	2	2	4	1	3	1	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>1</td></tr> </table>	1	5	2	4	3	2	3	2	1	1	2	4	3	3	5	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>3</td></tr> </table>	1	5	2	1	3	2	1	5	1	2	3	1	2	4	3	3
5	1	4	2																																																																	
3	1	3	3																																																																	
2	2	3	1																																																																	
5	1	4	2																																																																	
4	5	1	3																																																																	
2	1	3	3																																																																	
5	2	2	4																																																																	
1	3	1	2																																																																	
1	5	2	4																																																																	
3	2	3	2																																																																	
1	1	2	4																																																																	
3	3	5	1																																																																	
1	5	2	1																																																																	
3	2	1	5																																																																	
1	2	3	1																																																																	
2	4	3	3																																																																	

7	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>4</td></tr> </table>	2	4	3	5	2	1	6	1	4	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>6</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr> </table>	2	6	1	1	4	5	4	3	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>7</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>0</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>3</td></tr> </table>	7	1	3	0	3	4	1	6	3	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>5</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>7</td><td>0</td></tr> </table>	5	1	1	4	4	3	3	7	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>5</td></tr> </table>	4	4	3	1	2	2	6	1	5
2	4	3																																																
5	2	1																																																
6	1	4																																																
2	6	1																																																
1	4	5																																																
4	3	2																																																
7	1	3																																																
0	3	4																																																
1	6	3																																																
5	1	1																																																
4	4	3																																																
3	7	0																																																
4	4	3																																																
1	2	2																																																
6	1	5																																																

7	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>3</td><td>5</td><td>2</td></tr> </table>	5	2	1	1	6	1	2	6	3	4	3	1	4	3	5	2	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>6</td><td>1</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>6</td><td>3</td><td>1</td></tr> </table>	6	1	4	1	4	5	2	3	3	2	3	4	1	6	3	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>4</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr> <tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>2</td></tr> <tr><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr> </table>	4	5	2	1	3	1	3	4	2	3	4	2	3	2	2	1	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>1</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>2</td><td>1</td><td>6</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr> </table>	2	5	3	4	1	5	4	3	6	2	1	6	6	1	2	5
5	2	1	1																																																																	
6	1	2	6																																																																	
3	4	3	1																																																																	
4	3	5	2																																																																	
6	1	4	1																																																																	
4	5	2	3																																																																	
3	2	3	4																																																																	
1	6	3	1																																																																	
4	5	2	1																																																																	
3	1	3	4																																																																	
2	3	4	2																																																																	
3	2	2	1																																																																	
2	5	3	4																																																																	
1	5	4	3																																																																	
6	2	1	6																																																																	
6	1	2	5																																																																	

8	<table border="1"><tr><td>5</td><td>1</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	5	1	7	1	2	3	6	2	5	<table border="1"><tr><td>6</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	6	2	4	3	1	4	5	3	4	<table border="1"><tr><td>4</td><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	4	4	1	4	2	7	2	3	5	<table border="1"><tr><td>7</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>8</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>5</td></tr></table>	7	1	0	1	2	8	5	3	5	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>2</td></tr></table>	1	0	4	4	8	4	3	6	2
	5	1	7																																															
	1	2	3																																															
6	2	5																																																
6	2	4																																																
3	1	4																																																
5	3	4																																																
4	4	1																																																
4	2	7																																																
2	3	5																																																
7	1	0																																																
1	2	8																																																
5	3	5																																																
1	0	4																																																
4	8	4																																																
3	6	2																																																

8	<table border="1"><tr><td>0</td><td>8</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td></tr></table>	0	8	3	2	2	4	4	3	6	5	5	7	1	2	3	1	<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>6</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>7</td></tr></table>	2	3	5	3	6	4	3	2	2	4	3	5	4	2	1	7	<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>6</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>7</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td></tr></table>	2	3	2	1	3	2	5	2	1	6	1	3	7	4	4	2	<table border="1"><tr><td>7</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>4</td><td>4</td></tr></table>	7	1	2	3	2	1	6	5	3	5	1	3	5	4	4	4
	0	8	3	2																																																																
	2	4	4	3																																																																
	6	5	5	7																																																																
1	2	3	1																																																																	
2	3	5	3																																																																	
6	4	3	2																																																																	
2	4	3	5																																																																	
4	2	1	7																																																																	
2	3	2	1																																																																	
3	2	5	2																																																																	
1	6	1	3																																																																	
7	4	4	2																																																																	
7	1	2	3																																																																	
2	1	6	5																																																																	
3	5	1	3																																																																	
5	4	4	4																																																																	

9	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	0	9	4	6	5	4	3	4	<table border="1"><tr><td>5</td><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	5	6	3	4	5	7	3	1	2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>9</td><td>5</td></tr></table>	1	2	7	3	5	4	0	9	5	<table border="1"><tr><td>4</td><td>1</td><td>8</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	4	1	8	2	3	3	5	4	6	<table border="1"><tr><td>7</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>8</td><td>1</td></tr></table>	7	4	5	2	6	2	1	8	1
	1	0	9																																															
	4	6	5																																															
4	3	4																																																
5	6	3																																																
4	5	7																																																
3	1	2																																																
1	2	7																																																
3	5	4																																																
0	9	5																																																
4	1	8																																																
2	3	3																																																
5	4	6																																																
7	4	5																																																
2	6	2																																																
1	8	1																																																

9	<table border="1"><tr><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>4</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>8</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr></table>	5	4	3	6	7	4	2	3	2	5	3	6	8	1	1	3	<table border="1"><tr><td>5</td><td>5</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>7</td></tr><tr><td>2</td><td>6</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>1</td><td>8</td><td>1</td><td>2</td></tr></table>	5	5	4	5	2	4	2	7	2	6	3	6	1	8	1	2	<table border="1"><tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>7</td><td>2</td><td>5</td></tr></table>	5	2	2	1	3	5	2	6	3	1	3	4	3	7	2	5	<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>7</td><td>5</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td><td>1</td><td>8</td></tr></table>	2	3	6	3	7	5	3	3	2	2	7	2	5	4	1	8
	5	4	3	6																																																																
	7	4	2	3																																																																
	2	5	3	6																																																																
8	1	1	3																																																																	
5	5	4	5																																																																	
2	4	2	7																																																																	
2	6	3	6																																																																	
1	8	1	2																																																																	
5	2	2	1																																																																	
3	5	2	6																																																																	
3	1	3	4																																																																	
3	7	2	5																																																																	
2	3	6	3																																																																	
7	5	3	3																																																																	
2	2	7	2																																																																	
5	4	1	8																																																																	

10	<table border="1"><tr><td>8</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>3</td></tr></table>	8	2	3	5	3	4	5	7	3	<table border="1"><tr><td>6</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>8</td><td>4</td></tr></table>	6	5	5	1	3	6	2	8	4	<table border="1"><tr><td>7</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>9</td></tr><tr><td>4</td><td>6</td><td>1</td></tr></table>	7	5	4	3	1	9	4	6	1	<table border="1"><tr><td>4</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>6</td></tr></table>	4	2	1	4	5	3	4	1	6	<table border="1"><tr><td>1</td><td>9</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>6</td></tr></table>	1	9	7	4	3	3	3	4	6
	8	2	3																																															
	5	3	4																																															
5	7	3																																																
6	5	5																																																
1	3	6																																																
2	8	4																																																
7	5	4																																																
3	1	9																																																
4	6	1																																																
4	2	1																																																
4	5	3																																																
4	1	6																																																
1	9	7																																																
4	3	3																																																
3	4	6																																																

10	<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td><td>7</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td></tr></table>	1	5	3	2	4	3	7	4	5	3	5	6	3	4	1	4	<table border="1"><tr><td>8</td><td>9</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>1</td><td>9</td></tr></table>	8	9	1	3	1	1	3	4	6	3	5	5	4	7	1	9	<table border="1"><tr><td>4</td><td>1</td><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>5</td><td>7</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>6</td><td>3</td></tr></table>	4	1	5	5	5	3	2	1	6	5	7	2	4	1	6	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>6</td><td>8</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>7</td><td>9</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>	1	6	8	2	3	1	3	6	3	1	6	5	7	9	4	5
	1	5	3	2																																																																
	4	3	7	4																																																																
	5	3	5	6																																																																
3	4	1	4																																																																	
8	9	1	3																																																																	
1	1	3	4																																																																	
6	3	5	5																																																																	
4	7	1	9																																																																	
4	1	5	5																																																																	
5	3	2	1																																																																	
6	5	7	2																																																																	
4	1	6	3																																																																	
1	6	8	2																																																																	
3	1	3	6																																																																	
3	1	6	5																																																																	
7	9	4	5																																																																	

第三章 - 动物园救援

— 游戏描述 —

在这个游戏中，使用两个骰子或两组数字卡片(从1到6)。每个玩家有6个代币——如果你有动物代币，那是最合适的。每个玩家还有一张纸，上面有从0到5编号的方框。每个玩家决定将他们的6个代币放置在哪里——在一个方框中放置多个代币也是可以的。

在玩家的回合中，通过掷骰子或抽取两张卡片生成两个数字，然后计算这两个数字的差值。如果玩家在对应的方框中有代币，他们可以解救其中一个代币。第一个解救出所有代币的玩家获胜。

— 放置代币的策略 —

玩家应该如何放置这6个代币？通常来说，先从一个更简单的问题开始是个不错的主意：放置1个代币的最佳位置在哪里？显然，应该将代币放在最有可能出现的方框中。我们无需进行复杂的分析，只需列出所有可能性，看看哪些差值出现的频率最高。

1-1	0		2-1	1		3-1	2		4-1	3		5-1	4		6-1	5
1-2	1		2-2	0		3-2	1		4-2	2		5-2	3		6-2	4
1-3	2		2-3	1		3-3	0		4-3	1		5-3	2		6-3	3
1-4	3		2-4	2		3-4	1		4-4	0		5-4	1		6-4	2
1-5	4		2-5	3		3-5	2		4-5	1		5-5	0		6-5	1
1-6	5		2-6	4		3-6	3		4-6	2		5-6	1		6-6	0

统计结果如下：0-6次，1-10次，2-8次，3-6次，4-4次，5-2次。所以，1显然是最好的选择，它会在36次中出现10次。我们可以按出现频率将它们排序为：1、2、3、0、4和5。

更难的问题是，当你有多个代币时该怎么办。看到这些数字后，一个适合大一点孩子的问题是：为什么不把所有代币都放在1上呢？为了理解这个问题的答案，设想一个更简单的情况，你只有两个代币，并且忽略所有不是1或2的结果。那么，1出现的概率是18次中的10次，而2出现的概率是18次中的8次。如果你把两个代币都放在1上，你需要两次掷骰子都得到1才能获胜。然而，如果你把一个代币放在1上，另一个代币放在2上，那么你可以在两次掷骰子后获得1和2，或2和1——这种情况发生的概率大约高出60%！

与其进行长篇详细的分析，不如简单直观地说：将大部分代币放在1上，较多的放在2上，可能还可以在0或3上放一个。虽然不能保证你一定会赢，但从长远来看，这样的策略应该会表现不错！

第三章 - 常见求和

— 调查介绍 —

制作一张有 12 行的纸张。每行放置 8 个方格。在最左侧的列中，在方格里写上从 1 到 12 的数字。将每个数字上放置一个代币。开始掷一对骰子。每次掷骰后，将与骰子点数之和对应的代币向右移动一个方格。每个代币的目标是第一个全部移动到页面最右端。

让孩子自己提出一些要调查的问题。一些自然的问题可能包括：

- 哪个代币会赢，为什么？
- 哪些代币表现良好，哪些表现不佳？
- 哪个代币表现最差？
- 如果每行的方格数量减少或增加，获胜者会发生什么变化？

让孩子解释他们对这些问题答案的想法，然后通过进行实验来验证这些想法。

在每轮开始之前，增加一个竞争元素，猜测哪个代币会赢。

— 分析 —

与之前游戏的分析一样，分析这个游戏的最简单方法是列出所有可能性。

1+1	2		2+1	3		3+1	4		4+1	5		5+1	6		6+1	7
1+2	3		2+2	4		3+2	5		4+2	6		5+2	7		6+2	8
1+3	4		2+3	5		3+3	6		4+3	7		5+3	8		6+3	9
1+4	5		2+4	6		3+4	7		4+4	8		5+4	9		6+4	10
1+5	6		2+5	7		3+5	8		4+5	9		5+5	10		6+5	11
1+6	7		2+6	8		3+6	9		4+6	10		5+6	11		6+6	12

总结频率如下：1-0 次，2-1 次，3-2 次，4-3 次，5-4 次，6-5 次，7-6 次，8-5 次，9-4 次，10-3 次，11-2 次，12-1 次。顺便提一下，这些是记住的好数字，适用于任何涉及掷两颗骰子求和的游戏！

因此，1 总是会输，而 7 是最有可能获胜的。然而，7 与 6 或 8 之间的频率差异并不大。如果只进行几轮掷骰子，很难准确预测哪个代币会赢。只有当你进行大量掷骰时，才能保证 7 最终会赢。

第三章 - 数独变体

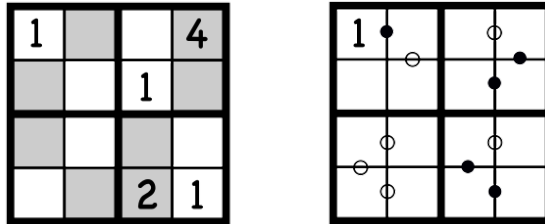
世界上有很多数独变体，还有更多类似于这些数独变体的其他谜题。本节将介绍五种这些数独变体。这些变体都遵循“拉丁方”的规则——即每个数字在每一行和每一列中恰好出现一次。

你可以通过从适当类型的填充谜题开始来制作任何这些数独——无论是拉丁方还是拼图数独。第 1-2 章附加材料中的所有数独解答都应对你有用。在你手中有了解答之后，添加此特殊谜题所需的额外信息，并去除一些或所有的数字。

— 拼图数独与额外信息 —

这两种谜题类型都是拉丁方，但它们有额外的限制，每个子区域内的每个数字都必须出现一次。除了是拼图数独之外，它们还有其他特性。

偶数-奇数数独。在这些谜题中，偶数会被标记为灰色。这种额外的信息通常使得这些谜题变得非常简单，通常可以去除几乎所有的数字。



Kropki 数独。这与普通数独相同，只是增加了两种类型的点放置在单元格之间。如果点是空心的，那么两个数字相差1。如果点是实心的，则一个数字是另一个数字的一半。与偶数-奇数数独类似，这种额外的信息通常使这些谜题变得比较简单，这意味着几乎可以去除所有的数字。

— 加法和减法数独 —

这些谜题被划分为多个子区域，每个子区域都有一个目标数字。与标准数独不同的是，只要谜题仍然是拉丁方，子区域内的数字可以重复。如果一个子区域只有一个方格，那么目标数字就是那个方格的值。

在一个**Sumdoku** 数独谜题中，子区域内所有数字的总和是给定的目标数字。在一个**Diffdoku** 数独谜题中，所有子区域有一个或两个方格。如果子区域有两个方格，则这两个数字的差值是给定的目标数字。

3+		3	7+
6+	4+		
		6+	4+
7+			

3-	1-	3	2-
		3-	
1-	1		2-
	2-		

在 **Sumdiffdoku** 数独谜题中，既使用加法也使用减法。子区域用“+”或“-”标记，以指示是进行加法还是减法。

这三种类型的谜题通常没有给出数字。当然，只有一个方格的子区域本质上是已经填入数字的方格。对于年轻的孩子，你可能需要提供相当多的数字，以使谜题适合他们的理解水平。

为了变化数学计算，可以使用不同的数字组代替通常的1到4(对于4x4的谜题)。例如，可以使用数字1、3、5和7。如果你这样做，请在谜题上方列出这些数字，以便你的孩子知道使用哪些数字。

第三章 - 多少种方法

计算选择的方式数可以得出一些有趣的结果。大多数计数情况可以通过系统化的方法来解决。对于孩子来说，这可能很困难，没关系——让他们玩耍并享受探索的过程。系统化的方法可以等到他们年纪更大时再学习。

— 调查 1 —

用红色和蓝色绘制帽子、眼睛和斗篷的怪物，有多少种绘制方法？如果你只给帽子和斗篷上色，这个数量会如何变化？如果你使用三种颜色，或者每种颜色只能使用一次，这又会如何变化？

以一种系统化的方式来解决这些问题涉及到乘法，这对孩子来说可能还太早。然而，你的孩子可以玩这些想法，并开始培养对如何进行这种计数的感觉。

逐个解决这些问题。帽子可以是红色或蓝色，眼睛可以是红色或蓝色，斗篷可以是红色或蓝色。每个需要上色的物品都使可能性翻倍。因此，2 倍，再倍增一次，得到 8 种可能性。列出这些可能性是一种很好的方式来查看。用 R 表示红色，B 表示蓝色，并按照帽子、眼睛和斗篷的顺序列出颜色。可能性有：RRR、RRB、RBR、RBB、BRR、BRB、BBR、BBB。

RR, RB, BR, BB. 仅为帽子和斗篷上色时，有 2 倍的可能性，即 4 种可能性。这个列表是：RR、RB、BR、BB。

如果你有三种颜色用于三种物品，则有 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 种可能性（这是一个很长的列表）。

一般来说，如果事件彼此不影响，则乘以可能性。如果每种颜色只能使用一次，事件之间会互相限制并影响彼此。列出它们使用 G（表示绿色）作为第三种颜色的可能性有：RBG、RGB、BGR、BRG、GRB、GBR。

— 调查 2 —

你有一排 5 个相同的糖果。如何将它们上色，使得有 2 个红色和 3 个蓝色的糖果？

标记 2 张纸为 R，3 张纸为 B。你的孩子可以尝试这 10 种排列方式。列表如下：RRBBB、RBRBB、RBBRB、RBBBR、BRRBB、BRBRB、BRBBR、BBRRB、BBRBR、BBBRR。一种看法是，决定了 2 个红色的位置后，蓝色必须放在剩下的 3 个位置。有趣的是，你也可以先放置 3 个蓝色，再决定红色的位置。

如果你觉得有趣，可以通过改变这三个数字来变化这个调查——只需确保两个较小的数字加起来等于糖果的总数。

— 调查 3 —

找出通过加上 1 和 2 得到一个总和的所有方法。分别考虑和不考虑顺序。

不考虑顺序:以求和为 4 为例。可能性有 $1+1+1+1$ 、 $2+1+1$ 和 $2+2$ 。共有 3 种方法。尝试几个更多的例子后,你会发现你是在计算使用 2 来加到小于或等于 4 的数字的方式。可以使用 0 到 2 个 2, 因此有 3 种方法。一般来说,对于偶数,答案将是比数字的一半多一个;对于奇数,答案将是比数字减一的一半多一个。

考虑顺序:以求和为 4 为例。可能性有 $1+1+1+1$ 、 $2+1+1$ 、 $1+2+1$ 、 $1+1+2$ 和 $2+2$ 。共有 5 种方法。玩几种不同的例子并制作结果表。以下是你应该得到的结果(好的,你可能不会做到 10):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

查看这些数字后,你的孩子可能会注意到,每对数字相加得到下一个数字。这是为什么呢?这些数字叫做斐波那契数,它们意外地经常出现。

为了理解这些数字在这个调查中出现的原因,可以看一下总和为 4 的例子,并查看最后使用的数字。最后一个数字要么是 1,要么是 2。如果它是 1,那么之前的数字提供了所有加到 3 的方式。如果最后一个数字是 2,那么之前的数字提供了所有加到 2 的方式。因此,加到 4 的方法数是加到 3 的方法数加上加到 2 的方法数的总和。

更大的数字:如果你觉得有趣,可以尝试研究加到涉及 1 到 3 或甚至 1 到 4 的总和的方式数。在这些情况下寻找模式要困难得多,但玩弄这些数字同样有趣。

第三章 - 扑克牌排序

— 介绍 —

挑战是将一副编号的卡牌(例如 1 到 5)按以下规则排列,使得:

顶部的卡牌是 1。将这张卡牌放在一边。将下一张卡牌移动到底部。下一张卡牌是 2, 将其放在一边。将下一张卡牌移动到底部。继续这一过程,直到所有卡牌都按顺序放在一边。

一旦你的孩子发现对 1 到 5 的卡牌排序很简单,可以挑战他们对更大的数字范围进行排序。

— 有条理 —

这个谜题的难点在于有条理地解决。对于任何大小的卡牌堆,你可以进行试验,最终找到答案。让我们寻找一些有趣的模式,使其更容易解决。

假设你把卡牌按顺序摆放在桌子上。以下是前几个情况的解决方案。箭头后列出的数字给出了第一次经过卡牌后剩余卡牌的顺序。

1

1 2 -> 2

1 3 2 -> 3

1 3 2 4 -> 3 4

1 5 2 4 3 -> 5 4

1 4 2 6 3 5 -> 4 6 5

1 6 2 5 3 7 4 -> 6 5 7

如果卡牌数量是偶数(例如 6 张),那么奇数位置上填入的是前半部分的卡牌(在这种情况下是 1、2、3),而其他位置则使用卡牌数量减半后的解决方案,所有值增加相应的数值。在 6 张卡牌的例子中,奇数位置填入 1、2、3,偶数位置填入 4、6、5——这些值是 1、3、2(3 张卡牌的解决方案)每个都增加了 3。

对于奇数数量的卡牌,模式稍微复杂一些。与之前一样,奇数位置上填入的是前半部分的数字(例如 7 张卡牌的 1 到 4)。如果你查看这些例子,箭头后的第一个卡牌会被移到末尾,因此它应该是你希望在那个序列中最后的卡牌。基于这一观察,答案的解决过程与偶数情况类似。

第三章 - 差异金字塔

— 介绍 —

挑战是将数字 1 到 6 放置在一个金字塔中，顶部一行放一个卡牌，第二行放两个卡牌，第三行放三个卡牌，每个数字是下面两个数字的差值。

如果你遇到困难，这里有两个有用的提示。6 必须在底部行，因为它不能是任何一对数字的差值。类似地，5 必须在底部行，或者在 6 和 1 之上的中间行。

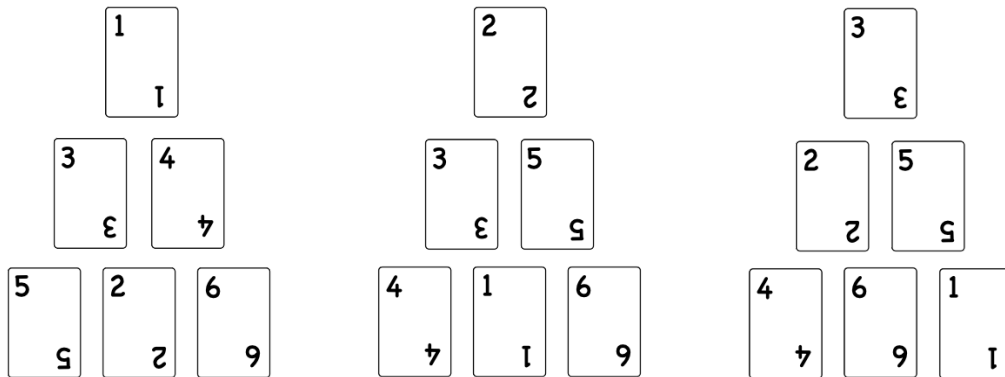
— 什么是“不同”的解决方案？ —

如果你的孩子发现这个谜题很容易解决，可以挑战他们找出所有可能的解决方案。讨论两个解决方案之间的区别——如果一个解决方案是另一个的镜像，它们应该被视为不同的解决方案吗？

在开始时回答什么使得解决方案不同是有用的。由于任何解决方案的镜像都是容易构造的且也是一个有效的解决方案，因此忽略镜像可以减少考虑的解决方案数量一半。

例如，我们可以假设 6 不仅在底部行，而且它要么在底部行的中间位置，要么在右侧。继续考虑 5，底部行只能有四种可能的布局：5 和 6，b 5 和 6，c 1 和 6，或者 d 6 和 1。

在这一点上，只需通过各种可能的 a、b、c 和 d 值进行试验和错误。经过一些尝试，你会发现 a 是 2，b 不能工作，c 必须是 4，而 d 必须是 4。因此，忽略镜像后，确切的解决方案有三种：



— 更大的金字塔 —

让我们使用1到10的卡片来制作一个四层的金字塔。这要复杂得多。可以先放置一些卡片，但之后需要一些决心。因为10不能是两个卡片的差值，它必须放在底层。同样，9也必须在底层或在紧靠底层的行中，位于1和10的上面。8和7卡片也是很好的选择，可以帮助去除可能性。

这意味着底层可能看起来像以下之一（忽略镜像）：

a b 9 10, c 9 d 10, 9 e f 10, g h 10 9, i 9 10 j, 9 k 10 L, m n 1 10, o 1 10 p, q r 10 1

这要考虑很多可能性！

幸运的是，如果你考虑8和7可以放置的位置，可能性会减少到以下列表（假设没有错误）。在你确定了底层后，完成每个选项都很简单：

8 3 10 9, 6 1 10 8, 8 1 10 6

15层、21层或更高的金字塔留给真正执着的挑战者。祝好运，享受挑战！